

斜面運動

學生：黃瀧毅 指導教授：朱慶琪、陳泰利

國立中央大學 物理學系

摘要

高中的時候對物理的認識都是在書本上，因此計算過許許多多運動學的題目，而斜面運動就是常接觸的題目之一。本專題的發想是來自於高中的物理題目，當斜面的底長度相同時，隨著斜面角度的增加，斜面的高度也會增加，而通常會以為當斜面的高度越高，也就是角度越大時，鐵球從頂端滑落的時間會越短，但理論上計算出來並非如此，因此想要從實驗去證明及演示出此結果。

一、實驗目的

演示在不同斜面且相同水平距離、斜面角度互餘者的相同的鐵球可以在同一時間落地。

二、實驗設計

三個斜面（圖一），一個為 45 度（下落最短時間之角度）的斜面，其他兩個為 30 度和 60 度，而其中的 60 度和 30 度為互餘的角度，所以下落時間會相同，而其他角度較不適合。例如，75 度來說水平距離僅僅只有 50 公分時，鉛直高度卻有 186.6 公分，但水平距離又不可過短，因為下落時間會太短導致無法觀察。



【圖一】實驗儀器圖，以及開關控制圖

其製作主要為木材的切割，而滑軌由集線條所構成，另外還需要控制鐵球同時下滑的電磁鐵，而為了演示的方便性，在滑落的末端加裝的防止鐵球彈飛的裝置。

三、實驗原理

假設鐵球為純滾動：

斜面滑落的鐵球之質量為 m ；其轉動慣量為 $\frac{2}{5}mR^2$ ；重力常數為 g ； d 為水平位移距離； v 為鐵球滾到底部時的末速； R 為鐵球半徑； θ 為斜面角度。

1. 由能量守恆得知：

$$mgd \tan \theta = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5}mR^2 \times \left(\frac{v}{R}\right)^2$$

$$\Rightarrow gd \tan \theta = \frac{7}{10}v^2$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{10}{7}gd \tan \theta$$

2. 由運動學的公式：

$$v^2 = 2a \times \frac{d}{\cos \theta}$$

$$\Rightarrow \frac{10}{7}gd \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = 2a \times \frac{d}{\cos \theta}$$

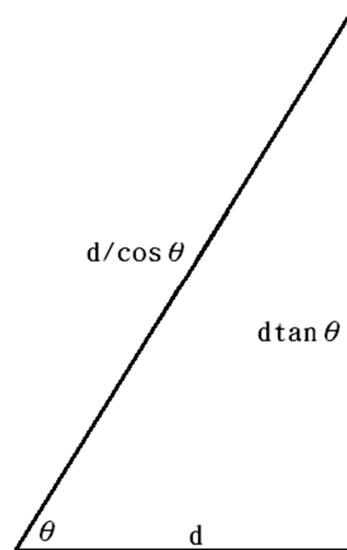
$$\Rightarrow a = \frac{5}{7}g \sin \theta$$

3. 推導出下落時間：

$$t = \sqrt{\frac{2S}{a}} = \sqrt{\frac{7 \times 2 \times \frac{d}{\cos \theta}}{5g \sin \theta}} = \sqrt{\frac{28d}{5g \sin 2\theta}}$$

4. 結論：由 $t = \sqrt{\frac{28d}{5g \sin 2\theta}}$ 可以知道，不同斜面但有相同水平距離，

且斜面角度互餘者，相同的鐵球可以在同一時間落地。



【圖二】實驗簡易示意圖

假設鐵球只有滑動：

由運動學的公式：

$$S = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2S}{a}} = \sqrt{\frac{2 \times \frac{d}{\cos \theta}}{g \sin \theta}} = \sqrt{\frac{4d}{g \sin 2\theta}}$$

由此公式得知，對於鐵球只有滑動，不同斜面但有相同水平距離，且斜面角度互餘者，相同的鐵球可以在同一時間落地，結論與純滾動相同。

但是以上的推導過程中尚未討論許多情形，例如摩擦力、滾動、滑動以及斜面角度等……。因此，以下先從討論純滾動的條件來判斷本實驗設計應為純滾動的範圍還是滾動加上滑動的情況，最後加上靜摩擦力或是動摩擦力的影響做深入探討。

純滾動的條件：

$$\text{由 } \tau = I_{CM} \alpha \Rightarrow f_s R = \frac{2}{5} m R^2 \alpha \quad \text{其中 } f_s = \mu_s mg \cos \theta$$

分析圖三中往 X 方向移動的鐵球所受到的力：

$$\sum F = ma \Rightarrow mg \sin \theta - f_s = ma$$

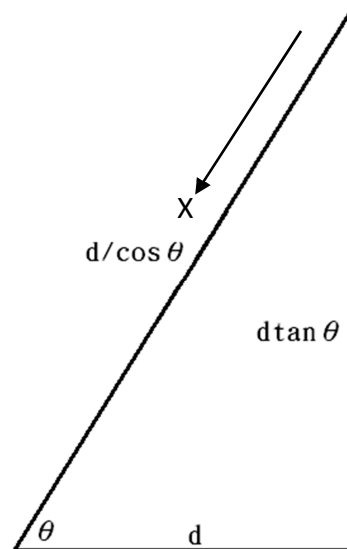
綜合以上兩式的結果加上純滾動的條件 $a = R\alpha$

$$\text{可以得到 } mg \sin \theta - \frac{2}{5} m R \frac{a}{R} = ma$$

算出鐵球從斜面滾下的加速度和靜摩擦係數

$$a = \frac{5}{7} g \sin \theta$$

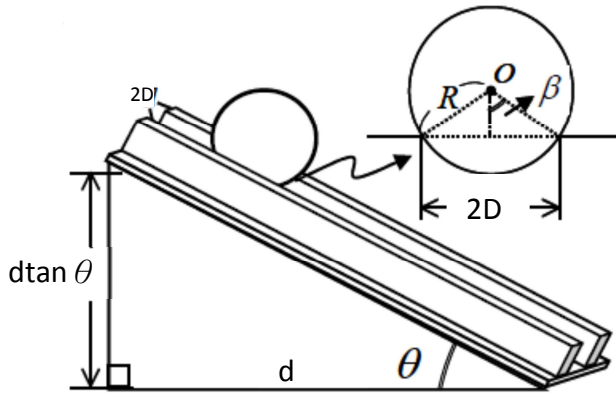
$$\mu_s = \frac{2}{7} \tan \theta_c \quad \theta_c \text{ 為純滾動允許的最大角度。}$$



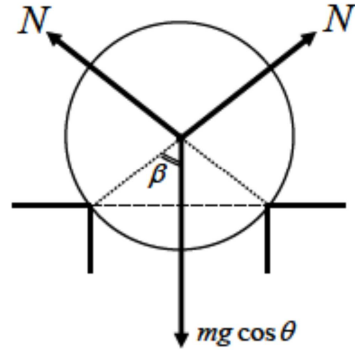
【圖三】考慮鐵球下落

然而實驗用的集線條靜摩擦係數 μ_s 介於木材和玻璃之間，大約為 0.12，因此推估 θ_c 約 22.8 度，但是實驗所使用的三個斜面為 30 度、45 度、60 度，皆大於 22.8 度，所以本實驗是不適合只考慮純滾動的情況，因此，必需另外考慮滑動和動摩擦力，還有集線條凹槽對實驗結果的影響。

考慮凹槽、滾動、滑動、動摩擦力的影響：



【圖四】鐵球在集線條上滾動



【圖五】集線條給鐵球的正向力

利用質心加速度 $v=at$ 求出下滑時間 t 。因此，重點要找出質心加速度 a 和質心速度 v 。

1. 找質心加速度 a ：

由圖五， $2 \times N \cos \beta = mg \cos \theta$

可得知軌道施於鐵球正向力 $N = \frac{mg \cos \theta}{2 \cos \beta}$

再由鐵球所受合力等於其質量乘上質心加速度，可以得到

$$mg \sin \theta - 2N\mu_k = ma \quad (\mu_k \text{ 為動摩擦係數， } N = \frac{mg \cos \theta}{2 \cos \beta})$$

$$\Rightarrow mg \sin \theta - 2 \times \frac{mg \cos \theta}{2 \cos \beta} \mu_k = ma$$

$$\text{由上式推得，質心加速度 } a = g \left(\sin \theta - \frac{\mu_k \cos \theta}{\cos \beta} \right)。$$

2. 找質心速度 v ：

只考慮純滾動：

$$\text{則鐵球滑下共轉了 } \theta_1, r\theta_1 = \frac{d}{\cos \theta} \Rightarrow \theta_1 = \frac{d}{r \cos \theta} = \frac{d}{R \cos \beta \cos \theta}, r = R \cos \beta$$

若考慮滑動及滾動，鐵球滑下實際轉了 θ_2 ：

$$\text{由運動學可以知道 } \omega^2 = 0^2 + 2\alpha\theta_2 \Rightarrow \theta_2 = \frac{\omega^2}{2\alpha}$$

雖然力學能不守恆，但仍然能量守恆(位能=質心動能+轉動動能+非保守力作功)，因此有以下式子

$$mgd \tan \theta = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + W_f$$

所以由純滾動走的角度和滑動及滾動的角度可以算出非保守力是作多少功

$$\text{非保守力 } W_f = \tau(\theta_1 - \theta_2) \quad , \quad \tau = I\alpha = 2 \times f_k r = 2f_k R \cos \beta$$

$$W_f = 2f_k R \cos \beta \times \frac{d}{R \cos \beta \cos \theta} - I\alpha \times \frac{\omega^2}{2\alpha} = \frac{2f_k d}{\cos \theta} - \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$\text{又因為 } f_k = 2N\mu_k = 2\mu_k \frac{mg \cos \theta}{2 \cos \beta} = \frac{\mu_k mg \cos \theta}{\cos \beta}$$

$$\text{所以 } W_f = \frac{2\mu_k mgd}{\cos \beta} - \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$\text{回到能量守恆 } mgd \tan \theta = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + W_f$$

$$\text{可以推導出質心速度 } v = \sqrt{2gd \left(\tan \theta - \frac{2\mu_k}{\cos \beta} \right)} \quad .$$

3. $v=at$ 求出下滑時間 t

$$\sqrt{2gd \left(\tan \theta - \frac{2\mu_k}{\cos \beta} \right)} = g \left(\sin \theta - \frac{\mu_k \cos \theta}{\cos \beta} \right) \times t$$

$$\text{鐵球下滑時間 } t = \frac{\sqrt{2gd \left(\tan \theta - \frac{2\mu_k}{\cos \beta} \right)}}{g \left(\sin \theta - \frac{\mu_k \cos \theta}{\cos \beta} \right)} \quad .$$

上式即為本實驗鐵球下滑時間之解。

四、實驗結果與討論

此實驗結果，最後證明了在 45 度角是此三個斜面中鐵球最快滑落至底部，而 60 度和 30 度有些微的差距，因此推測為摩擦力的影響，但其實此差距甚小，需從錄製運動過程中的影片做慢動作撥放才有辦法清楚的看出兩者的差距，而實際由慢動作撥放的影片中可以發現 60 度軌道上的鐵球較 30 度的快滑下。

$$\text{從先前推導出來的時間 } t = \frac{\sqrt{2gd\left(\tan\theta - \frac{2\mu_k}{\cos\beta}\right)}}{g\left(\sin\theta - \frac{\mu_k \cos\theta}{\cos\beta}\right)} \approx \sqrt{\frac{4d}{g} \left(\frac{1 - 2\mu_k \frac{\cos\theta}{\sin\theta \cos\beta}}{\sin 2\theta - \frac{4\mu_k \cos^2\theta}{\sin\theta \cos\beta}} \right)}$$

因為動摩擦係數很小，所以 $t \approx \sqrt{\frac{4d}{g \sin 2\theta}}$ ，此時，45 度是最快的，而 30 度

的和 60 度的次之，不過在實驗中看到的 45 度是最快的沒錯，但 30 度和 60 度會

有些微的差距，而此時就不能忽略後項，所以 $t \approx \sqrt{\frac{4d}{g} \left(\frac{1 - 2\mu_k \frac{\cos\theta}{\sin\theta \cos\beta}}{\sin 2\theta - \frac{4\mu_k \cos^2\theta}{\sin\theta \cos\beta}} \right)}$ ，而

且 30 度和 60 度的二倍角正弦值是相同的，所以只要比較後項即可， $\cos 30^\circ = 0.866$ ， $\cos 60^\circ = 0.5$ ，因此 30 度的分母比 60 度的分母還小，會有 30 度角較 60 度角慢的結果，由理論算出來時間差約 0.001 秒，超過肉眼可清楚分辨的 0.1 秒差距，所以由此可以證明理論預測大致上與實驗結果吻合。

$$\text{實際上由時間的通解去計算可以清楚的證明： } t = \frac{\sqrt{2gd\left(\tan\theta - \frac{2\mu_k}{\cos\beta}\right)}}{g\left(\sin\theta - \frac{\mu_k \cos\theta}{\cos\beta}\right)}$$

($g=9.8\text{m/s}^2$ 、 $d=0.6\text{m}$ 、 $\cos\beta=(R^2-D^2)^{1/2}/R=0.97$ 、 $\mu_k \approx 0.01$) 代入可以算出 $t(30)=0.5305$ 秒， $t(45)=0.4929$ 秒， $t(60)=0.5287$ 秒，因此此理論的結果和實驗吻合， $t(30) > t(60) > t(45)$ 。

五、參考資料

1. 沈仁翔, "利用滾動測量摩擦係數", 台灣 2005 年國際科學展覽會
2. R. A. Bachman, "Sphere rolling down a grooved track", Am. J. phys., **53**, 765(1985)